

# Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment

J. SICARD, P. BACOT et A. NEVEU

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 60, Bd Saint-Michel, Paris VI<sup>e</sup>, France

(Reçu le 10 Décembre 1983 et sous forme révisée le 16 Avril 1984)

**Résumé**—On étend la méthode de calcul analytique basée sur la technique des transformations intégrales aux 'structures' thermiques stationnaires, linéaires, réciproques où ont lieu des échanges par conduction, convection et rayonnement. Le formalisme est mis en place dans le cas simple d'une cellule enfermant un volume d'air, la conduction étant unidirectionnelle. On montre que l'évolution thermique peut être correctement décrite à l'aide d'un nombre restreint de paramètres. Des applications théoriques et pratiques sont développées.

## 1. INTRODUCTION

LES METHODES de calcul utilisées actuellement pour déterminer l'évolution thermique des bâtiments en régime instationnaire sont essentiellement de trois types :

- Les méthodes simplifiées, très approchées, caractérisant le bâtiment à l'aide d'une ou deux constantes de temps.
- La méthode des différences finies qui intègre l'équation de la chaleur grâce à une discrétisation de l'espace et du temps.
- La méthode des facteurs de pondération qui donne les réponses en quelques points grâce à un produit de convolution des sollicitations. Il y a autant de séries de facteurs de pondération, calculées dans un premier temps que de couples sollicitation-réponse.

Ces méthodes, outre qu'elles sont lourdes en temps calcul (voir paragraphe 5.1) fournissent des résultats dont l'interprétation physique est délicate.

Parmi les méthodes analytiques, la technique de la transformation intégrale [1, 2] utilisant des solutions du problème aux valeurs propres associé, permet de traiter les problèmes de conduction dans les milieux composites [3]. Nous montrons qu'elle s'applique aux milieux enfermant des ambiances qui sont le siège de convection et de rayonnement, pour peu que celui-ci soit linéarisé. L'obtention des solutions du problème aux valeurs propres pour un bâtiment où la conduction peut être considérée comme unidirectionnelle dans les parois, est largement facilitée par le formalisme des matrices de transfert [4, 5] qui n'avait été utilisé jusqu'à présent que dans le cas d'un simple mur. Nous proposons donc une méthode de calcul analytique applicable au bâtiment, pour lequel se pose le problème du couplage par convection et rayonnement, reposant sur l'analyse modale. Nous donnons une autre voie très performante pour obtenir des modes propres grâce à une discrétisation spatiale. La formulation matricielle du problème sous forme de système linéaire et la réduction de ce système permettent un traitement

numérique particulièrement efficace. Nous comparons la rapidité de simulation de cette méthode avec celle des méthodes évoquées plus haut. Nous dégageons aussi l'intérêt théorique et pratique de l'analyse modale qui permet d'énoncer certains résultats dans un domaine où la simulation numérique brute donne parfois lieu à des interprétations erronées ou non démontrables.

## 2. PRESENTATION DU CAS TRAITE

Le problème de base que nous nous proposons de traiter est celui d'un bâtiment composé de parois planes enfermant des ambiances où se produisent des échanges par rayonnement et convection, les coefficients thermophysiques étant supposés constants et homogènes dans chaque tranche de chaque paroi. Cependant en généralisant, la technique des transformations intégrales s'applique à des 'structures' thermiques linéaires et stationnaires quelconques pour peu que les échanges soient réciproques. Le formalisme des matrices de transfert peut être appliqué à des parois planes même si la conductivité n'est pas homogène dans chaque couche.

Pour simplifier les notations, nous mettons en place les équations dans le cas simple d'une cellule composée de  $n$  parois multicouches enfermant un volume d'air dont le taux de renouvellement est supposé constant.

La cellule est soumise à un ensemble de sollicitations au niveau des faces des parois (convection, rayonnement solaire direct, diffus, rayonnement infra-rouge), sur l'air (flux de chauffage, apports gratuits) et à l'intérieur des parois (absorption dans les vitrages, plancher chauffant).

### Hypothèses de calcul

Nous reprenons ici les hypothèses classiques d'un certain nombre de modèles de calcul : linéarité et stationnarité ; couches homogènes ; conduction unidirectionnelle dans les parois ; température d'air homogène et mélange instantané ; parois grises à émission et réflexion diffuses dans le domaine du rayonnement solaire et celui de l'infra-rouge. On ne

NOMENCLATURE			
$n$	nombre de parois	$M_p, M_{pi}, M_{p0}$	matrices de transfert
$k, k_{pj}$	conductivité	$X, Y, S$	matrices des composantes
$c, c_a$	chaleurs massiques d'une couche, de l'air		dans la base propres, des mesures, des sollicitations
$C_a$	capacité calorifique de l'air	$X, Y, S$	matrices des valeurs moyennes de $Y$ et $S$ entre 0 et $T$
$e_{pk}, a_{pk}, b_{pk}$	épaisseur, diffusivité, effusivité	$A, B, C, D$	matrices de l'estimateur
$\dot{m}$	débit massique de renouvellement d'air	$A_m, B_m, C_m, D_m$	matrices de l'estimateur réduit
$q(M, t)$	production volumique de chaleur	$V$	matrices des couples sollicitation-mesure en régime permanent
$H'_p, H''_p$	coefficients de convection extérieurs et intérieurs	$J, L$	matrices diagonales des coefficients des matrices de transfert pour les parois et l'air
$S_p$	surface de paroi		matrices d'un schéma aux différences finies
$x$	axe orienté vers l'intérieur		masse volumique
$T'_p, T''_p, T_{pj}, T''_0$	températures sur les faces extérieures, intérieures, aux interfaces, de l'air intérieur	$\rho$	valeur propre, temps caractéristique
$T'_p, T''_a$	températures équivalentes d'air externe, température de l'air de renouvellement	$\lambda, \tau$	
$T(M, t), TO(M)$	température à l'instant $t$ , initiale	$\phi'_p, \phi''_p, \phi''_0$	flux totaux rentrant par la face externe, sortant de la face interne, de l'air
$I_p, J_p, K_p, L_p$	éléments de la matrice $M_p$	$\phi'^e_p, \phi''^e_p, \phi''^e_0$	flux totaux équivalents imposés
$\tilde{T}(M, t), x_i(t)$	composantes de $T(M, t)$ dans la base propre	$\phi'^c_p, \phi''^c_p, \phi''^c_0$	apports
$\mathcal{J}_j(t), \mathcal{J}_p, s_j(t)$	sollicitation à l'instant $t$ , unitaire, composante	$\psi_i(M), \psi(M)$	fonctions propres
$V_j, V_j(M)$	régime permanent associé à $\mathcal{J}_j$	$\psi'_p, \psi''_p, \psi''_0, \psi''_{pj}$	valeurs des fonctions propres
$m$	ordre de l'estimateur réduit	$\varphi(M), \varphi'_p, \varphi''_p, \varphi''_0$	flux associé à une fonction propre
$r, q, s$	nombre de mesures, de sollicitations, de facteurs de pondération	$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$N^*, N^+$	nombre de multiplications et d'additions	$\delta(M, t)$	reste instantané
$R, P$	matrices symétriques de rayonnement linéarisé et de couplage	$\alpha, \beta, \varepsilon_i$	coefficients ou matrices diagonales de coefficients.

traite pas les problèmes de migration d'eau ou de changement de phase.

La méthode présentée en 4.4 permet de traiter le cas de géométries quelconques (ponts thermiques notamment).

3. MISE EN EQUATION DU PROBLEME

La linéarité et la stationnarité permettent d'utiliser le principe de superposition et de choisir arbitrairement l'origine des températures. Nous prendrons comme température de référence la température moyenne de rayonnement de la cellule.  $T(M, t)$  représente l'écart à cette température.

3.1. Equation de la conduction

Dans chaque couche de chaque paroi, elle s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial x^2} + q(M, t) \tag{1}$$

$\rho, c, k$  sont constants dans chaque couche.  $q(M, t)$  est le terme de production volumique.

3.2. Equation d'évolution de l'air

La température  $T''_0$  de l'air est gouvernée par la relation :

$$C_0 \frac{dT''_0(t)}{dt} + \phi''_0(t) = 0 \tag{2}$$

où  $\phi''_0$  représente le flux perdu par l'air (y compris par renouvellement).

3.3. Conditions aux limites

Elles s'appliquent à chaque face de chacune des parois et à l'air et sont donc au nombre de  $2n + 1$  auquel il faut joindre les conditions aux interfaces des tranches.

Dans le problème complexe des échanges à l'intérieur de la cellule (flux solaire, échange par rayonnement infra-rouge entre parois, échange par convection avec

l'air), la linéarité nous est d'un grand secours. Nous séparons d'un côté les termes dépendant de l'état (inconnu) de la cellule, et, de l'autre, les termes imposés à priori et calculables à partir des sollicitations extérieures. Les premiers caractérisent le couplage entre les différents éléments de la structure thermique.

**3.3.1. Faces externes des parois.** Le flux entrant par la face externe des parois résulte :

- des échanges par convection :  $h_c(T_a - T'_p)$
- des échanges par rayonnement infra-rouge avec l'environnement qui, après linéarisation, prennent la forme :  $h_r(T_r - T'_p)$   
 $h_r$  est le coefficient de rayonnement linéarisé  
 $T_r$  température résultante externe (rayonnement infra-rouge)
- des apports solaires directs et diffus  $\varphi_v$

Le flux total  $\phi'_p$  pénétrant dans la paroi  $p$  s'obtient donc par la relation :

$$\phi'_p = (h_c T_a + h_r T_r + \varphi_v) S_p - (h_c + h_r) S_p T'_p$$

que nous noterons :

$$\phi'_p(t) + H'_p S_p T'_p(r) = \phi'^e_p(t) \quad (3)$$

$H'_p$  est le coefficient d'échange par convection et rayonnement linéarisé.

**3.3.2. Limites entre deux couches d'une paroi.** Pour permettre l'utilisation ultérieure d'un formalisme unique, les résistances thermiques seront prises en compte par le jeu de couches fictives très minces, de très faible inertie et conductivité. La continuité des températures et des flux entre les couches  $j$  et  $j+1$  de la paroi  $p$  s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{pj}(M, t) &= T_{pj+1}(M, t) \\ k_{pj} \frac{\partial T_{pj}(M, t)}{\partial x} &= k_{pj+1} \frac{\partial T_{pj+1}(M, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

**3.3.3. Faces des parois cote intérieur.** Le flux total ( $w$ ) reçu par la paroi  $p$  au niveau de sa surface, à l'intérieur de la cellule provient des différentes sollicitations (flux solaire, une partie du flux de chauffage et des apports gratuits) que nous regroupons sous le terme  $\phi''^e_p$  et des échanges :

- avec l'air intérieur par convection :  $H''_p S_p (T''_0 - T''_p)$
- par rayonnement entre parois dans le domaine de l'infra-rouge qui, après linéarisation, s'expriment par la relation  $\sum_{j=1}^n R_{pj} T''_j$ .

Les termes  $R_{pj}$  qui s'obtiennent à partir de la méthode des radiosités [6] ou de Gebhardt [7] vérifient les relations :

$$R_{pj} = R_{jp} \quad \sum_{j=1}^m R_{pj} = 0$$

$$R_{pp} \geq 0 \quad \text{et} \quad R_{pj} \leq 0 \quad \text{si} \quad p \neq j.$$

En notant

$$P_{pj} = -R_{pj} + \delta_{pj} H''_p S_p \quad \text{pour} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad j > 0$$

$$P_{p0} = -H''_p S_p \quad \text{pour} \quad p > 0$$

et  $\phi''_p$  le flux total sortant de la paroi  $p$ , on obtient  $n$  relations :

$$\phi''_p = \sum_{j=0}^n P_{pj} T''_j - \phi''^e_p.$$

**3.3.4. Flux perdu par l'air.** Le flux total reçu par l'air provient :

- des apports  $\phi''^e_0$  (flux de chauffage, apports gratuits)
- du renouvellement d'air à la température  $T''_a$  :  $\dot{m} C_a (T''_a - T''_0)$
- des échanges par convection avec les parois :  $H''_p S_p (T''_p - T''_0)$ .

En notant :

$$P_{00} = \sum_{j=1}^n H''_j S_j + \dot{m} C_a$$

$$P_{0p} = -H''_p S_p$$

$$\phi''^e_0 = \phi''^e_0 + \dot{m} C_a T''_a$$

et  $\phi''_0$  le flux perdu par l'air, on a la relation :

$$\phi''_0 = \sum_{j=0}^m P_{0j} T''_j - \phi''^e_0$$

**3.3.5. Expression générale des conditions d'échange à l'intérieur de la cellule.** Les échanges se produisant à l'intérieur de la cellule peuvent être décrits par une seule relation matricielle :

$$\phi''(t) = \mathbf{P} \mathbf{T}''(t) - \phi''^e(t) \quad (5)$$

$\phi''$ ,  $\mathbf{T}''$ ,  $\phi''^e$  sont des vecteurs ayant  $n+1$  composantes.

La matrice  $\mathbf{P}$  ( $n+1$ ,  $n+1$ ) est symétrique à termes diagonaux positifs les autres étant tous négatifs et vérifie :

$$\forall p \in \{1, n\} \quad \sum_{j=0}^n P_{pj} = 0$$

$$\sum_{j=0}^n P_{0j} = \dot{m} C_a.$$

C'est la matrice de couplage entre les différents éléments à l'intérieur de la cellule.

#### 4. RESOLUTION DU PROBLEME

Nous allons utiliser la technique des transformations intégrales pour résoudre le problème. Il nous faut pour cela trouver dans un premier temps les solutions du problème aux valeurs propres associé.

##### 4.1. Problème aux valeurs propres

En cherchant la solution du problème homogène (celui pour lequel  $q(M, t) = 0$ ,  $\phi''^e_p(t) = 0$  et  $\phi''(t) = 0$ ) par la méthode de séparation des variables, sous la forme :

$$T(M, t) = \psi(M) e^{-\lambda t}$$

on débouche sur le problème aux valeurs propres suivant :

pour chaque couche de chaque paroi :

$$k \frac{d^2 \psi(M)}{dx^2} + \lambda \rho c \psi(M) = 0 \quad (6.1)$$

évolution de l'air :

$$\varphi_0'' - \lambda C_0 \psi_0'' = 0 \quad (6.2)$$

sur les faces externes des parois :

$$\varphi_p' + H_p S_p \psi_p' = 0 \quad (6.3)$$

à l'interface des couches  $j$  et  $j+1$  de la paroi  $p$  :

$$\begin{aligned} \psi_{pj}(M) &= \psi_{pj+1}(M) \\ k_{pj} \frac{d\psi_{pj}(M)}{dx} &= k_{pj+1} \frac{d\psi_{pj+1}(M)}{dx} \end{aligned} \quad (6.4)$$

échanges à l'intérieur de l'enceinte :

$$\psi'' = P\varphi'. \quad (6.5)$$

$\varphi(M)$  représente le flux associé au profil de température  $\psi(M)$  et qu'on peut calculer par la loi de Fourier.

L'intégration de la relation (6.1) dans la paroi permet de donner l'expression de la température et du flux sur la face intérieure de la paroi en fonction du flux entrant dans la paroi et de la température de l'air extérieur (nulle dans le cas présent) [8]

$$\begin{bmatrix} \psi_p'' \\ \varphi_p'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p(\lambda) & J_p(\lambda) \\ K_p(\lambda) & L_p(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_p' \end{bmatrix}.$$

La matrice  $M_p$  dont les éléments sont  $I_p, J_p, K_p, L_p$  est une fonction paramétrique de  $\lambda$ . Elle est le produit des matrices de transfert de chaque tranche  $M_{pk}$  et de la matrice de transfert à l'entrée de la paroi  $M_{p0}$

$$M_p = M_{pn} \dots M_{p1} M_{p0}$$

où :

$$M_{p0} = \begin{bmatrix} 1 & -1/H_p' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et :

$$M_{pk} = \begin{bmatrix} \cos \sqrt{\frac{\lambda}{a_{pk}}} e_{pk} & -\frac{1}{b_{pk} \sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{a_{pk}}} e_{pk} \\ b_{pk} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\frac{\lambda}{a_{pk}}} e_{pk} & \cos \sqrt{\frac{\lambda}{a_{pk}}} e_{pk} \end{bmatrix}.$$

La solution mise sous cette forme répond aux relations (6.1), (6.3) et (6.4).

Nous avons donc  $n$  couples de relations :

$$\begin{aligned} \psi_p'' &= J_p(\lambda) \varphi_p' \\ \varphi_p'' &= L_p(\lambda) \varphi_p'. \end{aligned} \quad (7)$$

En notant  $\varphi_0' = \varphi_0''$ ,  $J_0(\lambda) = 1/\lambda c_0$ ,  $L_0(\lambda) = 1$ , l'équation

(6.2) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \psi_0'' &= J_0(\lambda) \varphi_0' \\ \varphi_0'' &= L_0(\lambda) \varphi_0'. \end{aligned} \quad (8)$$

En ajoutant la relation (6.5), l'ensemble du problème aux valeurs propres se réduit aux équations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \psi'' &= J(\lambda) \varphi' \\ \varphi'' &= L(\lambda) \varphi' \\ \varphi'' &= P\psi'' \end{aligned} \quad (9)$$

$\varphi', \varphi'', \psi''$  sont des vecteurs à  $n+1$  composantes  $J(\lambda)$  et  $L(\lambda)$  matrices diagonales.

On déduit la relation suivante :

$$[PJ(\lambda) - L(\lambda)] \varphi' = 0 \quad (10)$$

qui n'admettra de solution non nulle que si

$$\det [PJ(\lambda) - L(\lambda)] = 0 \quad (11)$$

C'est l'équation transcendante aux valeurs propres du système. Elle caractérise la cellule et les conditions aux limites.

Les solutions de (11) forment une suite infinie que nous ordonnons par valeurs croissantes. Les valeurs  $1/\lambda_i$  homogènes à des temps sont appelées temps caractéristiques.

Dans la pratique il est exclu de donner l'expression analytique exacte de l'équation (11). Par contre, un algorithme approprié de calcul sur microordinateur permet d'obtenir les premiers temps caractéristiques avec une très bonne précision en quelques minutes pour une configuration arbitraire de cellule, le problème majeur étant de ne pas oublier de racine au cours de la résolution.

Dans le cas des parois multicouches, on pourra consulter à cet effet les références [8] et [9]. Mais il faut noter que le résultat énoncé par Sturm et Liouville [10] et dont on trouvera la démonstration dans [1] s'applique alors : si une fonction propre s'annule  $n$  fois à l'intérieur de la paroi, la valeur propre associée est celle de rang  $n+1$ . Dans le cas plus général de parois couplées autour d'un volume d'air, nous ne connaissons pas de critère absolu pour déceler l'oubli d'une valeur propre. Par contre, pour un profil donné (un régime permanent par exemple), il est possible de mesurer *a posteriori* l'incidence énergétique de la prise en compte d'un ensemble incomplet de fonctions propres. Ceci dépasse le cadre de cet article.

*Remarque.* Des conditions de température peuvent être imposées sur un domaine (c'est le cas de la température d'air d'un local parfaitement régulé). Le nombre d'inconnues est réduit d'autant ainsi que la dimension de la matrice  $PJ - L$ . Par exemple dans le cas qui vient d'être évoqué, la température d'air  $T_0$  est une sollicitation, l'équation (2) disparaît. Le nombre d'équations et d'inconnues dans les relations (5), (6.5), (9) et (10) devient alors égal à  $n$ .

### Fonctions propres

Quand l'équation (11) est vérifiée, le rang de l'équation (10) est réduit d'une quantité égale à l'ordre de multiplicité  $r$  de la racine  $\lambda$  qui est aussi la dimension de l'espace vectoriel des solutions  $\varphi'$ . En réinjectant les valeurs de  $\varphi'_p$  correspondantes dans les matrices de transfert des parois, on obtient l'espace vectoriel ou sous espace propre de même dimension (généralement égale à 1) des fonctions propres  $\psi_i$  qui sont des profils de température associés aux temps caractéristiques  $\tau_i$ .

La relation :  $\langle f, g \rangle = \int_v \rho c(M) f(M) g(M) dv$  étendue à l'ensemble des parois et à l'air, définit un produit scalaire.

On peut démontrer dans ce cas général où on a supposé tous les échanges réciproques (matrice d'échange symétrique, opérateur autoadjoint) que la relation d'orthogonalité de Sturm et Liouville [10] vis à vis du produit scalaire est vérifiée pour les différents sous espaces propres ; c'est-à-dire que deux fonctions propres  $\psi_i$  et  $\psi_j$  associées à des valeurs propres distinctes vérifient la relation :

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0 \quad (12)$$

Cette relation peut être étendue à l'intérieur des sous espaces propres en choisissant pour chacun d'eux une base orthogonale. Les fonctions propres peuvent également être normées de manière à avoir :  $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$ , symbole de Kronecker. L'unité des fonctions propres normées est  $K^{1/2} J^{1/2}$ .

L'ensemble ainsi orthonomé forme une base complète du problème homogène : si  $TO(M)$  est le profil initial de température, la solution à l'instant  $t$  sera donnée par :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(0) \psi_i(M) e^{-t/\tau_i} \quad (13)$$

avec

$$x_i(0) = \langle TO, \psi_i \rangle.$$

Les termes de rang élevé s'amortissent très rapidement. Un profil de température ayant la forme d'un mode propre se déforme par homotétie selon le temps caractéristique correspondant (toujours dans le cas du problème homogène).

### 4.2. Equations canoniques du problème général

Considérons la transformation intégrale suivante :

$$\bar{T}(\lambda_i, t) = \int_v \rho c \psi(\lambda_i, M) T(M, t) dv$$

que nous noterons plus simplement :

$$x_i(t) = \langle \psi_i, T \rangle. \quad (14.1)$$

La transformation réciproque permet de reconstruire le profil des températures à partir des fonctions  $x_i(t)$  :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \psi_i(M) + \delta(M, t). \quad (14.2)$$

Le terme  $\delta(M, t)$  de mesure nulle ( $\langle \delta, \delta \rangle = 0$ ) est introduit pour tenir compte de certaines discontinuités

qui peuvent exister du fait des conditions aux limites du problème. Il est instantané.

En injectant l'équation (14.2) dans les équations (1) à (5) qui régissent l'évolution du système, en utilisant les propriétés du gradient et de la divergence, le théorème de Gauss et la réciprocité des échanges, on arrive par un cheminement laborieux aux équations canoniques du système c'est à dire aux équations qui régissent l'évolution des composantes du système dans la base propre :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} + \lambda_i x_i(t) = \sum_{p=1}^n \psi'_{ip} \phi''_p(t) + \sum_{p=0}^n \psi''_{ip} \phi''_p(t) + \int_v \psi_i(M) q(M, t) dv \quad (15)$$

$\psi'_{ip}$  et  $\psi''_{ip}$  sont les valeurs de  $\psi_i(M)$  sur les faces extérieure et intérieure de la paroi  $p$  ( $\psi''_{i0}$  pour l'air).

Il est commode de séparer l'effet de chaque sollicitation (température d'air extérieur, flux solaire, flux de chauffage), car on peut appliquer le principe de superposition.

Nous noterons chacune des sollicitations qui conditionnent l'évolution du système sous la forme  $\mathcal{J}_j(t) = s_j(t) \mathcal{J}_j$ .

$\mathcal{J}_j$  étant la sollicitation unitaire associée. A cette sollicitation unitaire correspond un régime permanent que nous notons  $V_j(M)$ .

Les relations (15) s'écriront alors :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} + \lambda_i x_i(t) = \sum_{j=1}^q B_{ij} s_j(t) \quad (16)$$

$B_{ij}$  peut se calculer à partir du terme de droite de la relation (15). On obtient une autre expression de  $B$  grâce aux régimes permanents

$$B_{ij} = \lambda_i \langle \psi_i, V_j \rangle$$

en notant que  $dx_i/dt = 0$  quand la seule sollicitation est  $\mathcal{J}_j(t) = \mathcal{J}_j$ .

La résolution du système d'équations différentielles linéaires du premier ordre (16) permet de trouver les composantes  $x_i(t)$ . La solution du problème général est reconstituée à partir de l'équation (14) où :

$$\delta(M, t) = \sum_{j=1}^q s_j(t) \delta_j(M)$$

avec

$$\delta_j(M) = V_j(M) - \sum_{i=1}^{\infty} \langle V_j, \psi_i \rangle \psi_i(M)$$

### 4.3. Expression matricielle du problème d'évolution thermique

Dans la pratique, le thermicien ne s'intéressera qu'à un nombre limité  $r$  de mesures  $Y_k$  qui sont des températures ou des flux. Toutes ces mesures s'obtiendront à partir des composantes  $x_i(t)$

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{ki} x_i(t) + \sum_{j=1}^q D_{kj} s_j(t)$$

$C_{ki}$  représente la mesure considérée pour la fonction propre  $i$ ;  $D_{kj}$  représente la partie non décomposable provenant de la sollicitation  $j$ . L'évolution thermique de la cellule sera alors entièrement définie par la double équation matricielle :

$$\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{S} \quad (17.1)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{S} \quad (17.2)$$

$\dot{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{X}$  sont de dimension infinie,  $\mathbf{B}$  matrice ( $\infty \times q$ ),  $\mathbf{A}$  matrice carrée diagonale de dimension infinie  $A_{ii} = \lambda_i$ ,  $\mathbf{S}$  vecteur des  $q$  sollicitations,  $\mathbf{C}$  matrice ( $r \times \infty$ ),  $\mathbf{D}$  matrice ( $r \times q$ ).

La matrice  $\mathbf{D}$  des parties non décomposables s'obtient à partir des régimes permanents par la relation :

$$\mathbf{D} = \mathbf{V} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$V_{ki}$  étant la valeur de la  $k$ ème mesure pour le  $i$ ème régime permanent. Le quadruplet de matrices ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ) caractérise complètement le problème. Nous l'appelons estimateur. Il est ici d'ordre infini, car nous avons retenu tous les termes de la base propre.

#### 4.4. Obtention des modes propres par discrétisation spatiale

Le spectre des fonctions propres et des valeurs propres peut être obtenu par une autre voie que la voie analytique [11, 12]. Il s'agit d'effectuer une discrétisation de l'espace en un certain nombre de noeuds en chacun desquels on écrit les équations d'échange énergétique. Le champ continu des températures est alors approximé par un vecteur température noté  $\mathbf{T}$ .

L'équation de la chaleur jointe aux conditions aux limites s'écrit :

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{T} + \mathbf{H}\mathbf{S} \quad (18)$$

où  $\mathbf{K}$  est une matrice diagonale liée aux capacités calorifiques,  $\mathbf{L}$  est une matrice carrée symétrique représentant les échanges thermiques,  $\mathbf{H}$  est une matrice rectangulaire liée aux types de conditions aux limites,  $\mathbf{S}$  est le vecteur des sollicitations.

On constate que la matrice  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{L}$  a des vecteurs propres qui sont des approximations des fonctions propres analytiques. Les vecteurs propres discrets ont la même propriété d'orthogonalité que les fonctions propres. Dans la base des vecteurs propres du système, on retrouve la formulation correspondant aux équations (17).

Ce procédé a l'avantage de permettre de traiter des problèmes multidimensionnels tels que les ponts thermiques.

#### 4.5. Réduction de l'estimateur

Dans la pratique du bâtiment, on observe une décroissance globale très rapide de l'importance des fonctions propres ou des vecteurs propres selon leur rang. Les transferts thermiques peuvent être simulés avec une très bonne précision en ne conservant qu'un

nombre limité des fonctions propres. On déduit à cet effet un estimateur approché d'ordre  $m$  ( $\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m, \mathbf{D}_m$ ) de l'estimateur initial. Pour satisfaire au critère de conservation de l'énergie, l'estimateur réduit doit permettre d'obtenir le profil exact des régimes permanents quand les sollicitations sont constantes ; ce qui impose la relation :

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{V} - \mathbf{C}_m \mathbf{A}_m^{-1} \mathbf{B}_m \quad (19)$$

#### 4.6. Simulation

La solution de l'équation différentielle (17.1) s'obtient par la méthode de variation de la constante :

$$\mathbf{X}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \left[ \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{S}(\tau) d\tau \right] \quad (20)$$

dans laquelle chaque composante  $x_i$  de  $\mathbf{X}$  s'écrit :

$$x_i(t) = e^{-t/\tau_i} \left( x_{0i} + \int_0^t e^{t'/\tau_i} \left( \sum_{j=1}^q B_{ij} s_j(\tau) \right) d\tau \right).$$

Quand les sollicitations  $s_j(t)$  ont une forme simple (échelon, triangle, sinusoïde...) on obtient une solution analytique exacte. Ceci permet notamment de retrouver l'expression analytique des facteurs de pondération.

Dans les autres cas, on procède à une discrétisation du temps. C'est le cas notamment quand on utilise des fichiers de données météorologiques. Nous supposons alors que les sollicitations sont connues à des intervalles de temps  $\Delta t$  connus et qu'elles varient linéairement entre deux valeurs successives.

L'intégration de (17.1) fournit alors la relation :

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = e^{-\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{X}(t) + \alpha \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{S}(t) + \beta \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\mathbf{S}(t + \Delta t) \quad (21)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des matrices diagonales calculées une fois pour toutes avant la simulation et dont les termes sont :

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{\varepsilon_i} [1 - (1 + \varepsilon_i) e^{-\varepsilon_i}] \quad (22)$$

$$\beta_{ii} = \frac{1}{\varepsilon_i} [\varepsilon_i + e^{-\varepsilon_i} - 1] \quad \text{avec} \quad \varepsilon_i = \frac{\Delta t}{\tau_i}.$$

Nous avons fait volontairement apparaître le terme  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$  qui représente les composantes du régime permanent glissant (le régime permanent qui serait obtenu si les sollicitations étaient maintenues constantes à partir de l'instant considéré).

Les relations précédentes appellent un certain nombre de remarques :

- Les composantes de  $\mathbf{X}(t)$  s'amortissent d'autant plus que l'ordre de la fonction propre considérée est élevé. Il s'agit d'un problème de refroidissement.
- Quand  $\Delta t/\tau_i$  est très grand  $\alpha_{ii} \sim 1/\varepsilon_i$  et  $\beta_{ii}$  est voisin de 1. Les composantes à partir d'un ordre élevé sont voisines de celles du régime permanent à l'instant considéré.
- Quand  $\Delta t/\tau_i$  est faible (grande constante de temps),  $\alpha_{ii}$  et  $\beta_{ii}$  sont voisins de  $\varepsilon_i/2$ , ce qui veut dire que les composantes d'ordre peu élevé peuvent se calculer à

partir de la moyenne des régimes permanents glissants aux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  pondérés par les termes  $\Delta t / \tau_i$ .

— Dans la pratique, le nombre de fonctions propres retenu dépendra de la précision demandée, de la rapidité de fluctuation des sollicitations et du lieu de la mesure.

## 5. RESULTATS

### 5.1. Comparaison des temps de simulation par différentes méthodes

Pour un système à  $q$  sollicitations et  $r$  mesures, nous comparons le nombre d'opérations élémentaires exigées par les deux méthodes de calcul classiquement utilisées (différences finies, facteurs de pondération) et par l'analyse modale, au stade de la simulation. Nous noterons  $N^+$  et  $N^*$  les nombres d'additions et de multiplications.

*Méthode des différences finies.* Le champ de température (discrétisation à  $m$  noeuds) à l'instant  $t + \Delta t$  s'obtient par la relation :

$$\mathbf{T}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{T}(t) + \mathbf{A}_2 [\alpha \mathbf{S}(t) + \beta \mathbf{S}(t + \Delta t)]$$

$\mathbf{S}(t)$  représente le vecteur des  $q$  sollicitations

$$\dim(\mathbf{T}) = m \quad \dim(\mathbf{A}_1) = m \times m$$

$$\dim(\mathbf{S}) = q \quad \dim(\mathbf{A}_2) = m \times q.$$

On vérifie aisément que les nombres d'opérations élémentaires sont les suivants :

$$N^* = mq + m^2 + 2q$$

$$N^+ = mq + m^2 + q - m.$$

*Méthode des facteurs de pondération.* Elle s'appuie sur la connaissance de  $q \times r$  fonctions de transfert caractérisant les relations entrée-sortie du système. Chacune des fonctions de transfert (réponse à un triangle) est elle-même discrétisée en  $s$  valeurs échelonnées dans le temps, le reste étant caractérisé par une fonction exponentielle décroissante du temps.

Pour obtenir la réponse du système à l'instant  $t$ , il faut donc réaliser  $q \times r$  produits de convolution discrétisés.

Pour chaque convolution, il faut effectuer  $s$  multiplications et  $s$  additions (dont une addition pour le reste); pour chacune des  $r$  sorties il faut additionner les  $q$  produits de convolution soit  $q - 1$  additions. Au total, il faudra donc :

$$N^* = rqs$$

$$N^+ = r(qs + q - 1).$$

*Analyse modale.* Le nombre d'opérations élémentaires se calcule à partir des équations (21) et (17.2) où l'on suppose que les calculs d'exponentielles ont été faits une fois pour toutes. L'ordre de l'estimateur est  $m$ . Le

calcul de (21) fait intervenir :

$mq + 2m$  multiplications,  
en gardant les valeurs de  $\beta \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{S}(t)$ ;  
 $m(q - 1) + 2m$  additions,  
en mémoire entre deux pas de temps.

Le calcul de (17.2) nécessite :

$r(m + q)$  multiplications

$r(m + q - 1)$  additions.

Soit au total :

$$N^+ = rm + mq + rq + m - r$$

$$N^* = rm + mq + rq + 2m.$$

*Application numérique.* Nous prenons le cas d'un bâtiment simple à 3 sollicitations et 4 mesures correspondant à une discrétisation à 50 noeuds et un estimateur réduit d'ordre 5. Le nombre total d'opérations pour chaque pas de simulation sera de :

105 pour l'analyse modale,

5265 pour la méthode des différences finies,

1160 pour la méthode des facteurs de pondération.

Il convient toutefois de remarquer que la méthode des différences finies fournit plus d'informations que les deux autres puisqu'elle donne le champ complet  $\mathbf{T}(t)$ .

### 5.2. Résultats théoriques

A la différence des méthodes citées plus haut, l'analyse modale permet d'établir certains résultats généraux. Ainsi peut-on montrer que pour une évolution où l'état final est le même que l'état initial, les valeurs moyennes des mesures s'obtiennent à partir des valeurs moyennes des sollicitations et ne font pas intervenir l'inertie.

En effet, en intégrant l'équation (17) entre  $O$  et  $T$ , on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(0) - \mathbf{A} \int_0^T \mathbf{X}(t) dt = \mathbf{TBS} \\ \mathbf{T}\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{C} \int_0^T \mathbf{X}(t) dt + \mathbf{TDS} \end{cases}$$

où  $\bar{\mathbf{Y}}$  et  $\bar{\mathbf{S}}$  sont les vecteurs des composantes moyennes de  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{S}$  dans l'intervalle de temps  $[O, T]$ .

L'état initial étant égal à l'état final, on en déduit :

$$\bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{CA}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \bar{\mathbf{S}}$$

ou :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}\bar{\mathbf{S}}.$$

La matrice  $\mathbf{V}$  des régimes permanents ne fait intervenir que les caractéristiques statiques de système et pas du tout l'inertie.

Une conséquence importante de ce résultat est que, si l'on considère la température intérieure de la cellule comme une sollicitation, toutes les autres sollicitations étant imposées, la consommation énergétique dépendra de la différence de température moyenne entre la température intérieure et la température extérieure. Ce qui implique, que pour des caractéristiques statiques

données (isolation), il y aura intérêt à réduire en période de chauffage l'écart entre les deux valeurs.

Pour une occupation intermittente en période froide, on a intérêt à avoir une inertie minimale (la température intérieure baisse rapidement et on ne chauffe pas inutilement les murs). Par contre en période d'intersaison où le risque de surchauffe apparaît dans la journée, l'inertie est un facteur favorable à l'économie d'énergie (stockage de chaleur dans la journée).

*Définition de l'inertie thermique.* Le modèle développé ici permet d'apporter une réponse à la question vague de l'inertie thermique. L'évolution des composantes des fonctions propres fait intervenir les matrices **A** et **B**. La réponse en un point s'obtient grâce aux matrices **C** et **D** (cette dernière faisant intervenir les termes correctifs non pris en compte par  $CA^{-1}B$ ). L'estimateur (**A**, **B**, **C**, **D**) caractérise donc pleinement l'inertie vis à vis des mesures qui nous intéressent. En effet la notion d'inertie est spécifique à un couple sollicitation-mesure. Cependant l'exemple suivant montre que la première fonction propre joue un rôle important vis à vis de l'ensemble de ces couples.

5.3. Exemple d'application

Les méthodes d'analyse modale analytique et discrétisée (5.4) ont fait l'objet de programmes de calcul informatisés.

Nous montrons ici sur un exemple très simple quelques résultats obtenus par la méthode analytique, qui ont été validés en effectuant une comparaison avec les résultats d'un autre algorithme.

Nous avons surtout voulu montrer le caractère fortement convergent de la décomposition spectrale des réponses qui permet de réduire l'estimateur à l'aide d'un très petit nombre de modes propres.

*Caractéristiques.* La cellule nodélisée de manière simpliste correspond à un appartement composé de trois types de parois : les parois extérieures, les vitrages et les murs séparant le local étudié des voisins supposés identiques. Les caractéristiques de l'appartement, isolé par l'intérieur, sont les suivantes :

- Volume d'air : 288 m<sup>3</sup>
- Taux de renouvellement de l'air : 1 volume/heure

- Dimensions : 12 m × 8 m × 3 m
- Paroi 1 : Surface 24 m<sup>2</sup>; 15 cm de béton, 5 cm d'isolant
- Paroi 2 : Surface 12 m<sup>2</sup>; vitrage de 4 mm
- Paroi 3 : Surface 276 m<sup>2</sup> (y compris plafond et plancher; 10 cm de béton (en contact avec d'autres ambiances identiques)

*Sollicitations et mesures.* Nous avons, pour simplifier, retenu trois sollicitations :

- température d'air extérieure
- flux de chauffage
- flux solaire sur les parois de type 3

La mesure retenue est la température de l'air à l'intérieur du local.

*Recherche des modes propres.* Les premiers modes propres du local ont été recherchés par les deux voies indiquées plus haut (purement analytique et discrétisation spatiale).

La comparaison des deux familles de temps caractéristiques (cf. tableau I) montre la bonne concordance des premiers termes de chaque série. Les résultats deviennent ensuite discordants du fait des erreurs de discrétisation.

La Fig. 1 donne l'allure de quelques fonctions propres. L'échelle transversale de la paroi 2 (vitrage) a été dilatée pour faciliter l'observation,  $T_0$  représente la température d'air pour le thermogramme étudié. Nous pouvons, à partir de ces schémas, faire un certain nombre de constatations : le premier mode propre a une forme voisine du régime permanent associé à un flux de chauffage. Nous avons observé ce phénomène sur tous les cas que nous avons traités à évolution libre.

Certaines fonctions propres ne font intervenir qu'une paroi (fonctions 2, 3, 4) d'autres concernent plusieurs parois (1, 7). Les thermogrammes spécifiques aux parois s'observent beaucoup plus en régulation parfaite du fait du faible couplage entre parois, car la température d'air est imposée. Dans l'exemple traité, les grandes différences entre parois font que les modes propres faisant intervenir plusieurs murs ne se trouvent qu'à partir d'un certain rang (sauf pour le premier mode). Ceci vient de la différence 'd'inertie thermique' entre parois.

Tableau 1. Temps caracteristiques (en heures)

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Méthode analytique	54,9	8,96	0,693	0,227	0,190	0,130	0,095	0,091	0,055	0,051
Méthode discrétisée	55,0	8,96	0,706	0,251	0,211	0,130	0,112	0,099	0,076	0,061
Numéro	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Méthode analytique	0,034	0,033	0,024	0,023	0,022	0,017	0,013	0,013	0,010	
Méthode discrétisée	0,057	0,044	0,029	0,024	0,014	0,010	0,009	0,002		



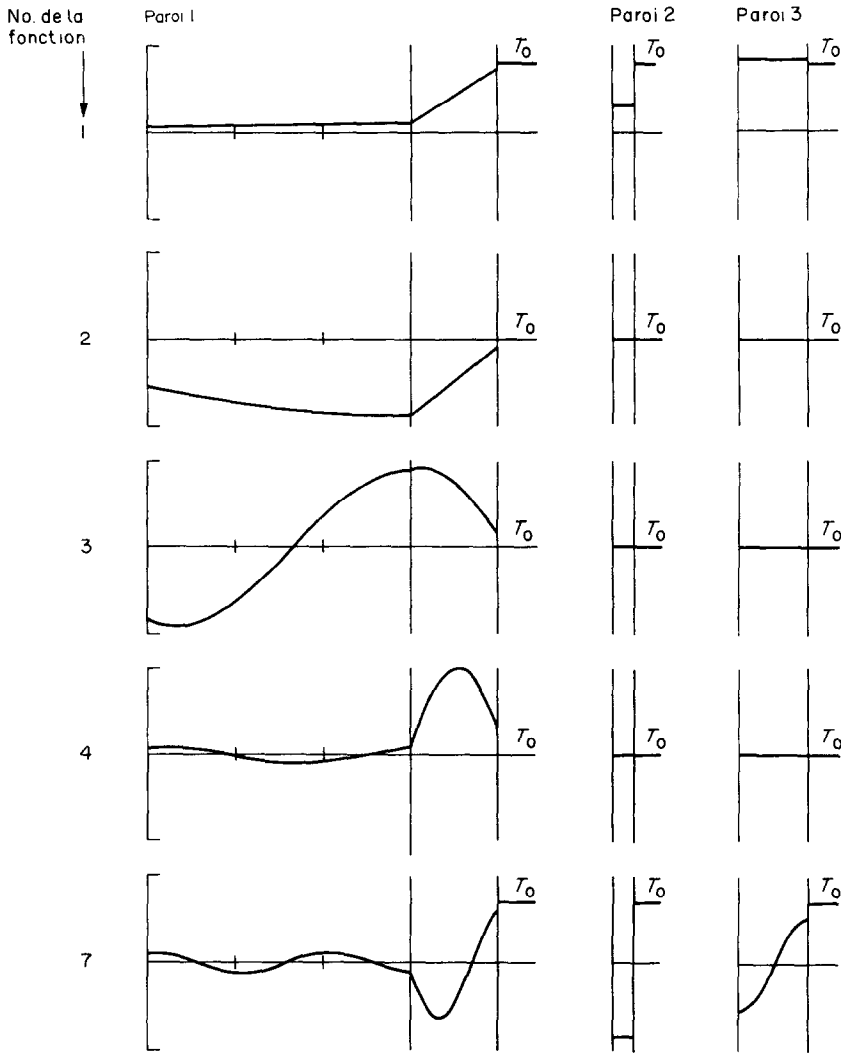


FIG. 1. Tracé des fonctions propres.

Nous avons constaté sur différents exemples que le thermogramme de rang  $j$  s'annule ou change de signe  $j-1$  fois (nous comptons comme changement de signe les fois où la température des parois est de signe opposé à celle de l'air). Ce résultat semble être le prolongement de celui énoncé par Sturm et Liouville dans le cas d'un mur [10]. Il a été utilisé comme critère de détection de 'trous' éventuels dans la suite des valeurs propres calculées numériquement.

**Spectres de réponse (Fig. 2).** Un excellent moyen de mettre en évidence l'importance relative de chaque mode propre pour un couple sollicitation  $j$ -mesure  $k$  et d'estimer le degré de précision de la décomposition spectrale consiste à représenter la contribution de chaque mode  $i$  à la réponse en régime permanent, c'est-à-dire les termes  $C_{ki}B_{ij}/A_{ii}$  (100% correspond à la

réponse exacte  $V_{kj}$  du régime permanent). En abscisses les temps caractéristiques sont indiqués sur une échelle logarithmique. En ordonnées, une échelle du type  $(|x|/x) \log(1+100|x|)$  permet de dilater les petites valeurs des contributions au régime permanent.

On constate pour les trois sollicitations la très grande importance du premier mode propre. Pour la première sollicitation (température extérieure), on observe l'effet retardateur du deuxième mode qui est quasiment inexistant dans les autres sollicitations. Les raies au voisinage de 0,1 heure caractérisent un phénomène d'échauffement de l'air accompagné d'un échauffement local de l'isolant de la paroi numéro 1.

**Réponse à un échelon.** La Fig. 3 permet de comparer la réponse en température d'air à un échelon selon les différentes sollicitations et avec quelques réductions. La valeur 100% correspond à la valeur du

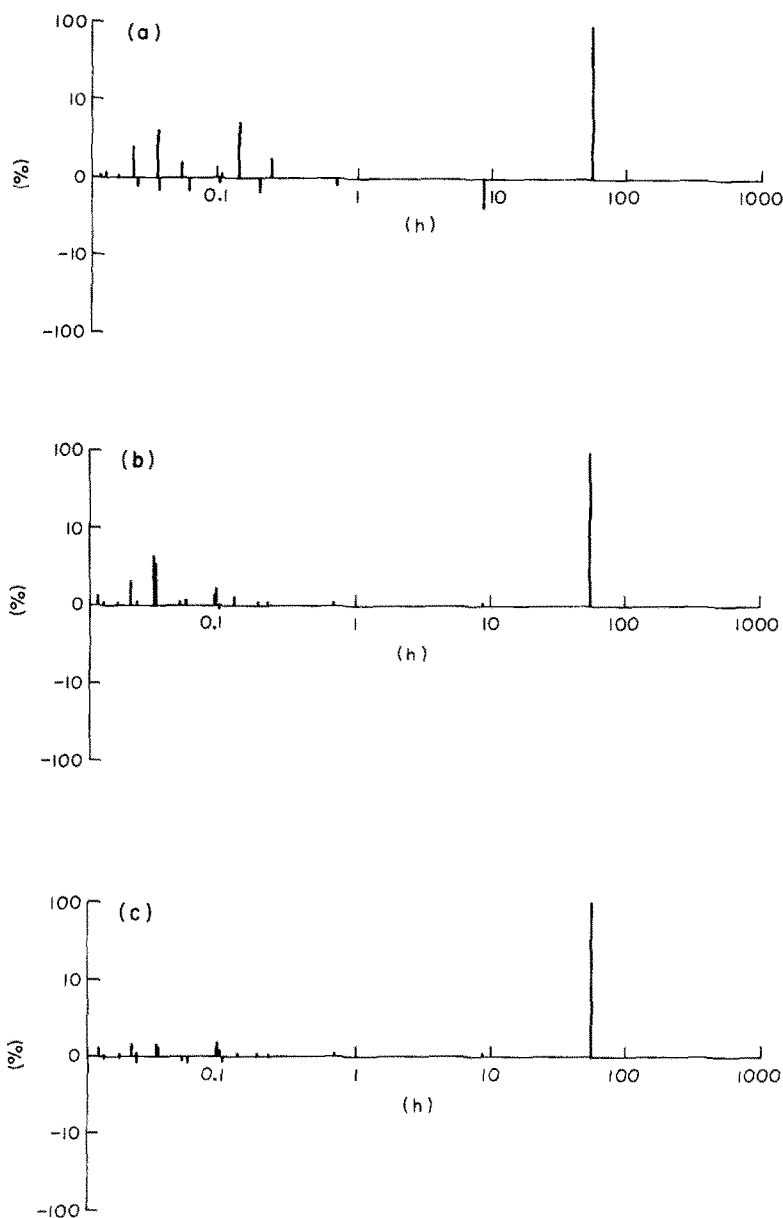


FIG. 2. Spectres de réponse associés à la température d'air. Sollicitations : (a) température extérieure; (b) flux sur l'air; (c) flux sur les faces intérieures des parois.

régime permanent. Le tracé en continu correspond à la réponse avec 19 modes propres (solution exacte), le pointillé long à la réponse obtenue avec un seul mode propre, le pointillé court à la réponse obtenue avec deux modes propres (modes propres 1 et 9 pour la première figure, mode propre 1 et 10 pour la deuxième).

Pour les deux premières sollicitations, on voit que le modèle à 1 seul mode propre donne une erreur maximum voisine de 5% pour un temps inférieur à dix heures, alors que le modèle à deux modes propres, pourvu que ceux-ci soient bien choisis, donne une allure de réponse qu'on ne distingue pas de l'allure exacte. Il en est de même pour la troisième sollicitation avec un modèle à une constante de temps.

*Réponse à une sollicitation triangulaire (Fig. 4).* Pour tester le modèle dans des configurations plus défavorables, nous avons choisi de présenter les résultats de simulation pour des signaux triangulaires. Nous avons en outre retenu la sollicitation la plus défavorable (température d'air extérieure). La demi largeur du triangle est successivement de 0,1 heure et de 1 heure. Les courbes représentent le rapport en fonction du temps de la réponse calculée à la réponse en régime permanent. On constate évidemment que pour des sollicitations rapides, la réponse est faible. La courbe en continu est obtenue avec 19 modes propres. Le pointillé long représente la simulation à partir des deux premiers modes propres. Le pointillé court prend en compte, en

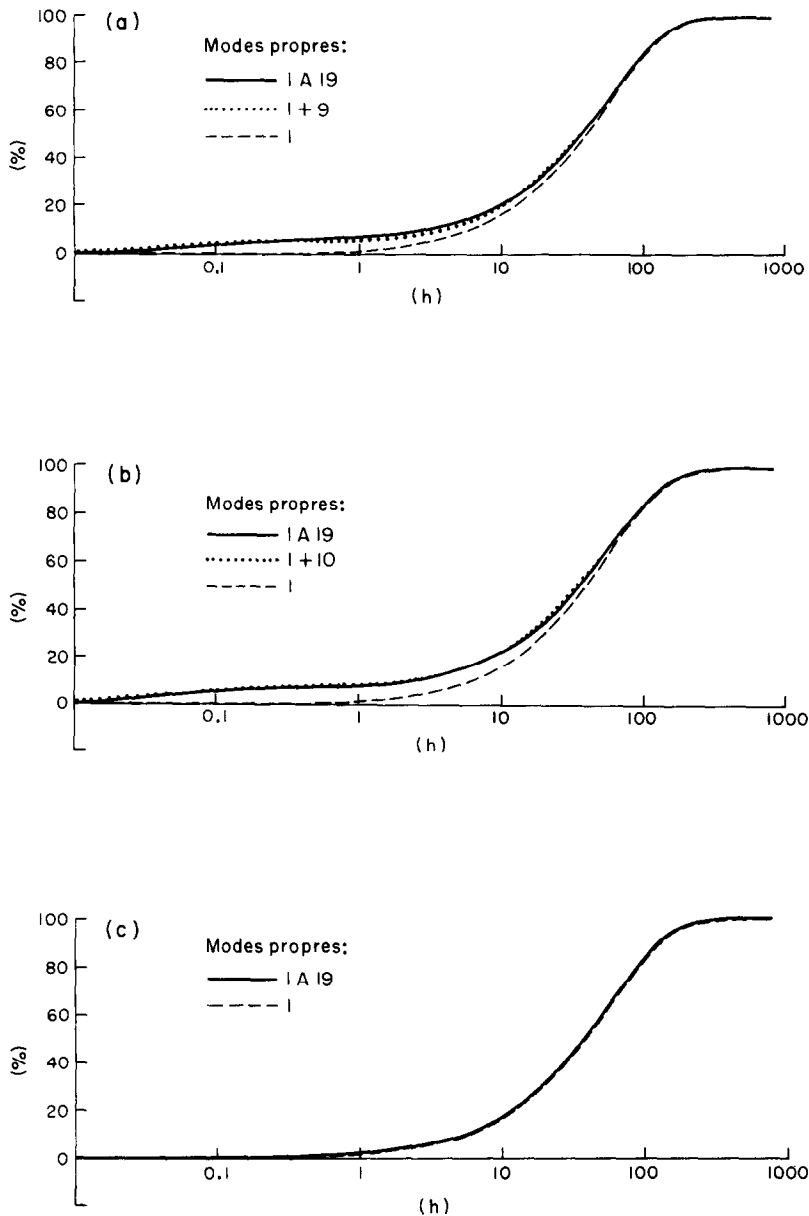


FIG. 3. Réponse de la température d'air à une sollicitation échelon : (a) de température extérieure ; (b) de flux sur l'air ; (c) de flux sur les faces intérieures des parois.

plus, le huitième mode propre. On constate que les deux premiers modes propres ne permettent pas de reproduire le début de la réponse, ce qui s'explique très bien du fait que les temps caractéristiques associés sont très supérieurs à la durée de la sollicitation. Par contre la 'trainée du phénomène' est assez correctement représentée par ces deux modes propres, voire par un seul au bout d'un certain temps. Ce résultat fournit une validation théorique à la prise en compte d'une constante de temps pour représenter les derniers termes des facteurs de pondération.

Il est intéressant de noter que le modèle à trois constantes de temps (1, 2, 8) permet, même dans les

premiers instants, d'obtenir une réponse très voisine de la réponse obtenue à partir d'un plus grand nombre de fonctions propres. Compte tenu des hypothèses spécifiques à la modélisation thermique (mélange instantané de l'air), d'autre part de l'espacement des données météorologiques, il est inutile de chercher à simuler avec une grande précision relative la réponse à des sollicitations de très courte durée. N'oublions pas non plus qu'en valeur absolue, la réponse à ces sollicitations rapides est très faible.

Nous retiendrons qu'il est possible, dans l'exemple cité, de très bien caractériser le comportement du bâtiment à l'aide de trois constantes de temps.

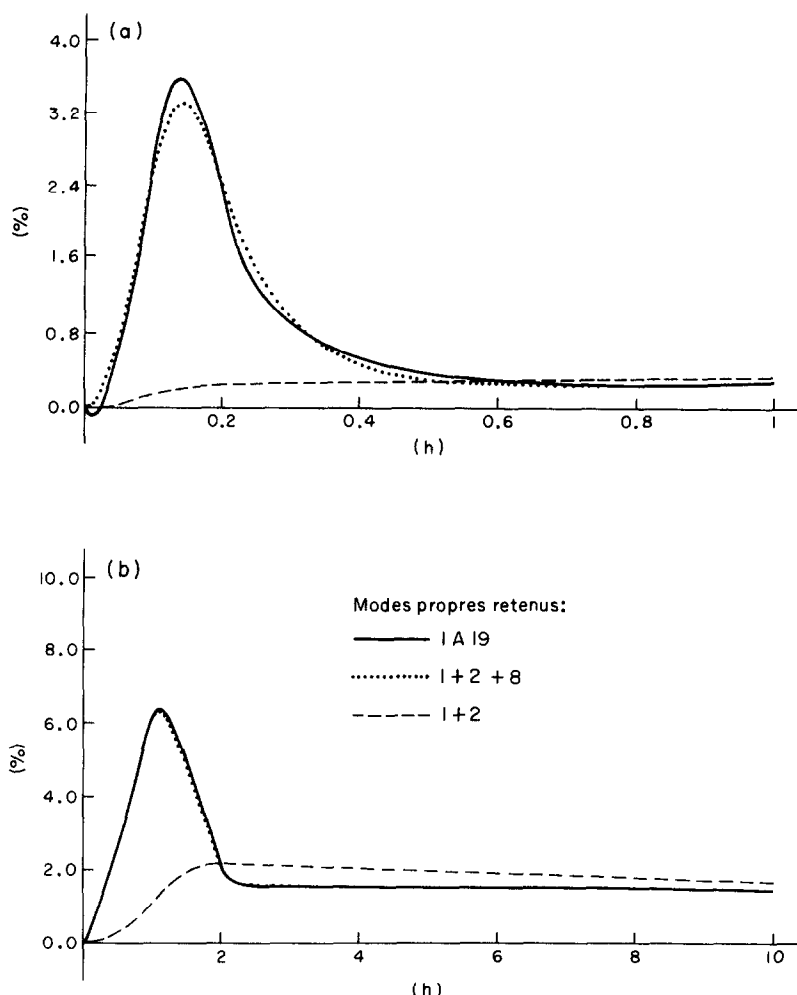


FIG. 4. Réponse de la température d'air à une sollicitation triangulaire de température extérieure. Période de montée en température: (a) 0,1 heure; (b) 1 heure.

## 6. CONCLUSION

L'analyse modale constitue un moyen puissant pour traiter les problèmes linéaires, stationnaires, réciproques. Avec les hypothèses couramment admises pour la modélisation des bâtiments, elle s'applique aux structures thermiques contenant plusieurs ambiances, à l'intérieur desquelles les échanges par convection et rayonnement se traduisent par des relations de couplage.

En réduisant à quelques paramètres essentiels l'évolution thermique du système, elle présente un double intérêt; au niveau théorique elle donne lieu à d'importantes interprétations et permet d'établir des résultats formels inaccessibles par les autres méthodes; au niveau pratique, elle constitue un outil de simulation particulièrement performant. Mais plus intéressantes encore sont les applications dans le domaine de l'identification et la commande pour la régulation des systèmes.

## BIBLIOGRAPHIE

1. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953).
2. I. N. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York (1972).
3. M. N. Özisik, *Heat Conduction*, p. 594, John Wiley, New York (1980).
4. A. H. Van Gorpum, Theoretical considerations of fluctuating heat flow, *Appl. Sci. Res. Vol. A2*, La Hague (1950).
5. L. A. Pipes, Matrix Analysis of Heat Transfer Problems, *J. Franklin Inst.* **263**, 195-206 (1957).
6. R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, p. 233, McGraw-Hill, New York (1980).
7. B. Gebhardt, *Heat Transfer*, p. 150, McGraw-Hill, New York (1971).
8. P. Duhamel and J. Gosse, Analyse thermique d'un mur composite soumis sur une face à une variation en créneaux de la température, *Int. J. Heat Mass. Transfer* **23**, 1663-1671 (1980).
9. M. D. Mikhailov, M. N. Özisik and N. L. Vulchanov, Diffusion in composite layers with automatic solution of

- the eigenvalue problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 1131–1141 (1983).
10. J. C. F. Sturm et J. Liouville, *Journal de Mathématiques*, Paris (1836–1838).
11. P. Bacot, A. Neveu et J. Sicard, Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le Bâtiment, *Revue Générale de Thermique* **267**, 189–201 (1984).
12. P. Bacot, G. Krauss et A. Neveu, Analyse des systèmes thermiques linéaires, Rapport interne, Ecole des Mines, Paris (1984).

### MODAL ANALYSIS OF HEAT TRANSFER IN BUILDINGS

**Abstract**—An analytic method using the integral-transform technique is extended to solve stationary, linear, reciprocal thermal transfer problems with heat transfer by conduction, convection and radiation. To simplify the analysis, the equations are established for the case of a simple cell (room) with one-dimensional conduction through the walls. It is shown that the solution can be achieved requiring very few parameters. Theoretical and practical applications are developed.

### ANALYSE DES WÄRMETRANSPORTES IN GEBÄUDEN

**Zusammenfassung**—Zur Lösung stationärer, linearer Wärmeübertragungsprobleme (Leitung, Konvektion, Strahlung) wurde ein analytisches Verfahren modifiziert, welches die Integral-Transformations-Technik verwendet. Zur Vereinfachung der Analyse wurden die Gleichungen für den Fall einer einfachen Zelle (Raum) mit eindimensionaler Wärmeleitung in den Wänden aufgestellt. Es zeigt sich, daß sich die Lösung mit Hilfe von sehr wenigen Parametern darstellen läßt. Theoretische und praktische Anwendungen des Verfahrens werden entwickelt.

### АНАЛИЗ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЗДАНИЯХ

**Аннотация**—Для решения стационарных линейных обратных задач теплопереноса теплопроводностью, конвекцией и излучением разработан аналитический подход, использующий метод интегральных преобразований. Для упрощения рассматриваются уравнения для простой ячейки (комната) с одномерной теплопроводностью через стенки. Показано, что для получения решения необходимо лишь небольшое число параметров. Рассматриваются возможности теоретического и практического применения.